

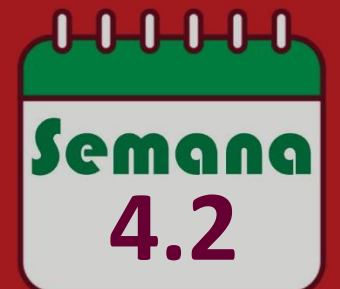


ce
pre
UNI

Álgebra

TEMA: ECUACIONES E INECUACIONES CON RADICALES

CICLO
PREUNIVERSITARIO
Admisión
2024-1



CONTENIDO

1) Radicales con Índice par o con Índice Impar

2) Ecuaciones con Radicales

3) Inecuaciones con Radicales

RADICACIÓN EN $\mathbb{R}$

Definición:

Sean $a, b \in \mathbb{R}$ y $n \in \mathbb{N}$, se dice que b es la raíz enésima real de a , si $b^n = a$ y se representa por $\sqrt[n]{a} = b$.

Por lo tanto:

$$\sqrt[n]{a} = b \Leftrightarrow a = b^n$$

Donde:

n es el índice del radical

a es el radicando

b es la raíz enésima real

Donde debe de cumplirse:

- 1) Si n es par entonces $a \geq 0$ y $b \geq 0$
- 2) Si n es impar entonces $(a \geq 0$ y $b \geq 0)$ o $(a < 0$ y $b < 0)$.

Existencia de Radicales con índice par o impar en $\mathbb{R}$

Para todo $n \in \mathbb{N}, a \in \mathbb{R}, b \in \mathbb{R}$, se cumple:

Índice impar

$$1) \sqrt[n]{a} = \begin{cases} b < 0, & \text{Si } a < 0 \\ b = 0, & \text{Si } a = 0 \\ b > 0, & \text{Si } a > 0 \end{cases}$$

Índice par

$$2) \sqrt[n]{a} = \begin{cases} b = 0, & \text{Si } a = 0 \\ b > 0, & \text{Si } a > 0 \end{cases}$$

Ejemplos:

$$\text{➤ } \sqrt{64} = 8 \quad \leftrightarrow \quad 64 \geq 0 \wedge 8 \geq 0 \wedge 8^2 = 64 \wedge n = 2 \text{ es par}$$

$$\text{➤ } \sqrt[4]{16} = 2 \quad \leftrightarrow \quad 16 \geq 0 \wedge 2 \geq 0 \wedge 2^4 = 16 \wedge n = 4 \text{ es par}$$

$$\text{➤ } \sqrt[3]{-8} = -2 \quad \leftrightarrow \quad (-2)^3 = -8 \wedge n = 3 \text{ es impar}$$

$$\text{➤ } \sqrt[5]{243} = 3 \quad \leftrightarrow \quad (3)^5 = 243 \wedge n = 5 \text{ es impar}$$

ECUACIÓN IRRACIONAL

Definición:

Es toda ecuación en la que aparecen radicales que contienen a la variable en su radicando. Es decir, si $E(x)$ es una expresión algebraica irracional (que contiene a la variable en el radicando), entonces la igualdad

$$E(x) = 0$$

se denomina ecuación irracional.

Ejemplos:

$$\sqrt{6-x} - 4 = 0$$

$$2023 + \sqrt[3]{x-1} + \sqrt{x} = \sqrt[6]{x}$$

$$\sqrt[3]{x-2} + \sqrt{x-7} = 50$$

$$\sqrt{4-x} + \sqrt{x+7} = 0$$

Pasos para resolver una ecuación irracional:

$$E(x) = 0$$

- 1) Se determina el conjunto de valores reales de x , para los cuales las expresiones algebraicas en $E(x)$ toma valores reales, el cual llamaremos conjunto de valores admisibles, denotado por ***CVA***.
- 2) Se determina el conjunto de valores reales ***CVE*** de x , para los cuales cumple la ecuación irracional, aplicando una estrategia algebraica para eliminar los radicales (elevando al índice del radical, cambio de variable, etc.)
- 3) Para obtener el conjunto solución ***CS*** de la ecuación, se intersecta los dos conjuntos hallados.

$$\mathbf{CS = CVA \cap CVE}$$

Ejemplo 1: Resuelva la siguiente ecuación $\sqrt{x+6} - x = 0$

- 1) Encontrando el conjunto de valores admisibles:

$$x + 6 \geq 0 \rightarrow CVA = [-6; +\infty [$$

- 2) (Estrategia algebraica para eliminar el radical)

Ecuación equivalente :

$$\sqrt{x+6} = x \quad \text{restricción} \quad x \geq 0$$

Elevando al cuadrado:

$$x + 6 = x^2 \rightarrow 0 = x^2 - x - 6 = (x - 3)(x + 2)$$

$$\text{Entonces} \quad x = 3 \vee x = -2 \quad \text{como } x \geq 0 \quad \therefore CVE = \{3\}$$

- 3) $CS = [-6; +\infty [\cap \{3\} = \{3\}$

El Siguiente teorema puede aplicarse para la resolución de algunas ecuaciones con radicales de **índice par** de la forma:

Teorema (Ecuaciones)

Sean $x; y \in \mathbb{R}$, $m \in \mathbb{N}$, entonces se cumple:

$$(1) \sqrt[2m]{x} = y \Leftrightarrow x \geq 0 \wedge y \geq 0 \wedge x = y^{2m}$$

$$(2) \sqrt[2m]{x} = \sqrt[2m]{y} \Leftrightarrow x \geq 0 \wedge y \geq 0 \wedge x = y$$

$$(3) \sqrt[2m]{x} + \sqrt[2m]{y} = 0 \Leftrightarrow x = 0 \wedge y = 0$$

$$(4) \sqrt[2m]{x} = 0 \Leftrightarrow x = 0$$

Ejemplo 2:

Determine el conjunto solución de la ecuación

$$\sqrt{x-5} + x - 11 = 0$$

Resolución:

$$\sqrt{x-5} = 11 - x$$

Por el teorema de ecuaciones parte (1)

$$x - 5 \geq 0 \wedge 11 - x \geq 0 \wedge x - 5 = (11 - x)^2$$

$$x \geq 5 \wedge x \leq 11 \wedge 0 = x^2 - 23x + 126$$

$$5 \leq x \leq 11 \wedge 0 = (x - 9)(x - 14)$$

$$5 \leq x \leq 11 \wedge x \in \{9; 14\}$$

$$\therefore CS = \{9\}$$

Ejemplo 3:

Halle la suma de los cuadrados de las soluciones de la ecuación

$$\sqrt[3]{2-x} = 1 - \sqrt{x-1}$$

Resolución:

1) Hallando el conjunto de valores admisibles: $x - 1 \geq 0 \quad \therefore CVA = [1; +\infty)$

2) $\sqrt{x-1} = 1 - \sqrt[3]{2-x}$

(Estrategia) Cambio de variable: $2 - x = t^3 \rightarrow x - 1 = 1 - t^3$

Reemplazando en la ecuación, se obtiene: $\sqrt{1-t^3} = 1 - t$

Elevando al cuadrado: $1 - t^3 = (1 - t)^2$

$$(1-t)(1+t+t^2) = (1-t)^2 \rightarrow (1-t)(t^2+2t) = 0$$

3) $t = 1 (x = 1)$

$t = 0 (x = 2)$

$t = -2 (x = 10)$

$CVE = \{1; 2; 10\} \quad \therefore CS = \{1; 2; 10\} \quad \text{Rpta: } 105$

Ejemplo 4:

Dado el conjunto $A = \{x \in \mathbb{R} / \sqrt{x+9} - x = \sqrt{9-x}\}$, determine el valor de verdad de las siguientes proposiciones:

$$p: n(A) = 2$$

$$q: A \subset \{3; 5\}$$

$$r: \exists x \in A \text{ tal que } x \in \{0; 1\}$$

Resolución: 1) Hallando el conjunto de valores admisibles:

$$x + 9 \geq 0 \wedge 9 - x \geq 0 \quad \Rightarrow \quad x \geq -9 \wedge 9 \geq x \quad \therefore CVA = [-9; 9]$$

2) (Estrategia) Dada la ecuación equivalente: $\sqrt{x+9} - \sqrt{9-x} = x$

Racionalizando el lado izquierdo de la ecuación

$$\begin{aligned} (\sqrt{x+9} - \sqrt{9-x})(\sqrt{x+9} + \sqrt{9-x}) &= x(\sqrt{x+9} + \sqrt{9-x}) \\ 2x &= x(\sqrt{x+9} + \sqrt{9-x}) \end{aligned}$$

$$x \left[2 - \left(\sqrt{x+9} + \sqrt{9-x} \right) \right] = 0$$

$$x = 0 \quad \vee \quad \sqrt{x+9} + \sqrt{9-x} = 2$$

Elevando al cuadrado: $\underbrace{14 + 2\sqrt{81 - x^2}}_{(+)} = 0$

$$\rightarrow CVE = \{0\}$$

$$3) CS = \{0\} = A$$

Luego:

$$p: n(A) = 3 \quad (\text{F})$$

$$q: A = \emptyset \quad (\text{F})$$

$$r: \exists x \in A \text{ tal que } x \in [0; 1] \quad (\text{V})$$

Ejemplo 5:

Determine el valor de verdad de las siguientes proposiciones

- I. El conjunto solución de $\sqrt{3-x} = \frac{(x-5)}{2}$ tiene 2 elementos.
- II. El conjunto solución de $\sqrt{x^2 + 2x + 1} = x + 1$ es infinito.
- III. El conjunto solución de $\sqrt{3-x} + \sqrt{x^2 - 3x} = x$ es $\{ \}$

A)VVF B)VVV C)FVV D)FVV E)FFF

INECUACIÓN IRRACIONAL

Definición:

Es una inecuación en la que aparecen radicales que contienen a la variable en su radicando. Sea $E(x)$ una expresión algebraica irracional (con radicales). Entonces las siguientes desigualdades

$$E(x) < 0, \quad E(x) > 0, \quad E(x) \leq 0, \quad E(x) \geq 0$$

se denominan inecuaciones irracionales.

Nota: El siguiente teorema es importante y sirve para resolver algunas inecuaciones con radicales de **índice par** de la forma:

Teorema (Inecuaciones)

Sean $x; y \in \mathbb{R}$ y $n, m \in \mathbb{N}$:

$$(1) \quad \sqrt[n]{x} \leq \sqrt[n]{y} \Leftrightarrow x \geq 0 \wedge y \geq 0 \wedge x \leq y$$

$$\sqrt[n]{x} < \sqrt[n]{y} \Leftrightarrow x \geq 0 \wedge y \geq 0 \wedge x < y$$

$$(2) \quad \sqrt[n]{x} + \sqrt[n]{y} \geq 0 \Leftrightarrow x \geq 0 \wedge y \geq 0$$

$$\sqrt[n]{x} + \sqrt[n]{y} > 0 \Leftrightarrow (x \geq 0 \wedge y > 0) \vee (x > 0 \wedge y \geq 0)$$

$$(3) \quad \sqrt[n]{x} \leq y \Leftrightarrow x \geq 0 \wedge y \geq 0 \wedge x \leq y^n$$

$$\sqrt[n]{x} < y \Leftrightarrow x \geq 0 \wedge y > 0 \wedge x < y^n$$

$$(4) \quad \sqrt[n]{x} \geq y \Leftrightarrow (y < 0 \wedge x \geq 0) \vee (y \geq 0 \wedge x \geq 0 \wedge x \geq y^n)$$

$$\sqrt[n]{x} > y \Leftrightarrow (y < 0 \wedge x \geq 0) \vee (y \geq 0 \wedge x \geq 0 \wedge x > y^n)$$

Ejemplo 1:

Determine el conjunto solución de la inecuación

$$\sqrt{x-4} + x - 6 \leq 0$$

Resolución:

Inecuación equivalente $\sqrt{x-4} \leq 6-x$

Por el teorema de inecuaciones parte (3):

$$x-4 \geq 0 \wedge 6-x \geq 0 \wedge x-4 \leq (6-x)^2$$

$$x \geq 4 \wedge 6 \geq x \wedge 0 \leq x^2 - 13x + 40$$

$$4 \leq x \leq 6 \wedge 0 \leq (x-8)(x-5)$$

$$x \in [4; 6] \wedge x \in \langle -\infty; 5] \cup [8; +\infty)$$

$$\therefore CS = [4; 5]$$

Ejemplo 2:

Resuelva la inecuación

$$\sqrt{x-8} + \sqrt[4]{16-x} \geq 0$$

Resolución:

Por el teorema de inecuaciones parte (2):

$$x-8 \geq 0 \quad \wedge \quad 16-x \geq 0$$

$$x \geq 8 \quad \wedge \quad 16 \geq x$$

$$\therefore CS = [8; 16]$$

Ejemplo 3:

Determine el valor de verdad de las siguientes proposiciones

- I. El conjunto solución de $\sqrt{x-2} + 1 < -x^2 + x$ es el vacío .
- II. El conjunto solución de $\sqrt{x-5} > -2$ es $[5; +\infty[$
- III. El conjunto solución de $\sqrt{x^2 + x + 1} > -3$ es $\mathbb{R}$

A)VVF B)VVV C)FVV D)FVV E)FFF

pre
UNI

Observaciones

:

1) Si en las ecuaciones o inecuaciones, aparecen solo radicales de índice impar. Luego el conjunto de valores admisibles CVA es igual al conjunto de los números reales $\mathbb{R}$.

2) A continuación se presentan 4 teoremas sobre inecuaciones, que servirán para resolver formas usuales de manera practica:

Teorema 1: Se presenta el producto de un radical de índice par por una expresión algebraica, con una desigualdad estricta.

Sean $a, b \in \mathbb{R}$ y $m \in \mathbb{N}$:

$$\sqrt[2m]{a} b > 0 \Leftrightarrow a > 0 \wedge b > 0$$

$$\sqrt[2m]{a} b < 0 \Leftrightarrow a > 0 \wedge b < 0$$

Teorema 2: Se presenta el producto de un radical de índice par por una expresión algebraica, con una desigualdad no estricta.

Sean $a, b \in \mathbb{R}$ y $m \in \mathbb{N}$:

$$\sqrt[2m]{a} b \geq 0 \Leftrightarrow a = 0 \vee (a > 0 \wedge b \geq 0)$$

$$\sqrt[2m]{a} b \leq 0 \Leftrightarrow a = 0 \vee (a > 0 \wedge b \leq 0)$$

Teorema 3: Se presenta el producto de un radical de índice impar por una expresión algebraica, con una desigualdad estricta.

Sean $a, b \in \mathbb{R}$ y $m \in \mathbb{N}$:

$$\sqrt[2m+1]{a} b > 0 \Leftrightarrow a b > 0$$

$$\sqrt[2m+1]{a} b < 0 \Leftrightarrow a b < 0$$

Teorema 4: Se presenta el producto de un radical de índice impar por una expresión algebraica, con una desigualdad no estricta.

Sean $a, b \in \mathbb{R}$ y $m \in \mathbb{N}$:

$$\sqrt[2m+1]{a} b \geq 0 \Leftrightarrow a b \geq 0$$

$$\sqrt[2m+1]{a} b \leq 0 \Leftrightarrow a b \leq 0$$

Ejemplo 3:

Resuelva la inecuación

$$\sqrt{x+9}(x^2 - x - 30) \leq 0$$

Resolución:

Por el teorema 2:

$$x + 9 = 0 \vee (x + 9 > 0 \wedge x^2 - x - 30 \leq 0)$$

$$x = -9 \vee (x > -9 \wedge (x - 6)(x + 5) \leq 0)$$

$$x = -9 \vee (x > -9 \wedge x \in [-5; 6])$$

$$x = -9 \vee x \in [-5; 6]$$

$$\therefore CS = \{-9\} \cup [-5; 6]$$

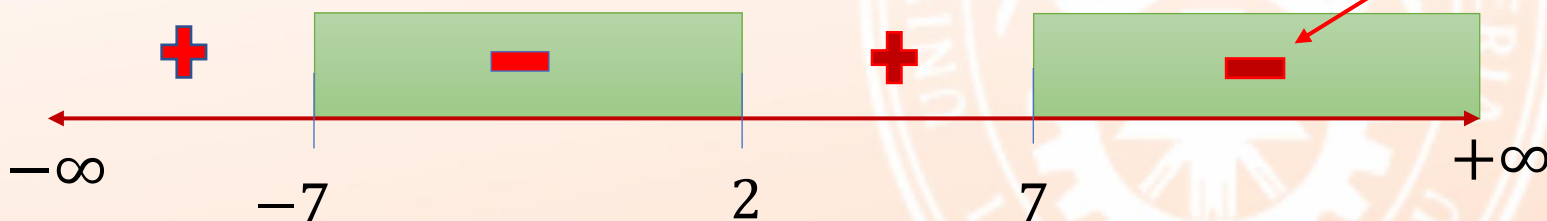
Ejemplo 4:

Resuelva la inecuación

$$\sqrt[5]{2-x} (x^2 - 49) < 0$$

Resolución: Por el teorema 3: $(2-x)(x^2-49) < 0$
 $(2-x)(x-7)(x+7) < 0$

Resolviendo utilizando la regla de los signos, encontramos el signo de la expresión cubica en los intervalos:



Coefficiente principal negativo

$$\therefore CS = \langle -7; 2 \rangle \cup \langle 7; +\infty \rangle$$

Ejemplo 5:

Resuelva la inecuación

$$\sqrt[3]{x^3 + 3x^2 + 6x - 2} + \sqrt{1 - x} < x + 1$$

Resolución:

1) Conjunto de valores admisibles: $1 - x \geq 0 \quad \therefore CVA = \langle -\infty; 1 \rangle]$

2) (Estrategia) Elevando al cubo ambos lados de la inecuación:

$$x^3 + 3x^2 + 6x - 2 + \sqrt{1 - x} < (x + 1)^3$$

$$\sqrt{1 - x} < 3 - 3x$$

$$\Leftrightarrow 1 - x < 9(1 - x)^2$$

$$\Leftrightarrow 0 < (x - 1)(9x - 8)$$

$$\Leftrightarrow x \in \langle -\infty; 8/9 \rangle \cup \langle 1; +\infty \rangle = CVE$$

3) $\therefore CS = \langle -\infty; 8/9 \rangle$